CONCOURS NATIONAL – MAROC - 1994
EHTP-EMI-ENIM-ENPL-ENSEM-ENSIAS-IAV-INPT
Epreuve d'algèbre

PREMIERE PARTIE

E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension $p \geq 1$. Pour un endomorphisme u de E , et $n \in \mathbb{N}$, on notera $K_n = \text{Ker } u^n$ et $I_n = \text{Im } u^n$, avec $u^0 = Id_E$.

u est nilpotent lorsqu'il existe un entier naturel k tel que $u^k = 0$. Son indice est le plus petit entier d tel que $u^d = 0$. On a donc $u^d = 0$ et $u^{d-1} \neq 0$.

1- Montrer que s'il existe n tel que $K_n = K_{n+1}$, alors $K_{n+1} = K_{n+2}$.

2- En utilisant la suite (dim K_n)$_{n \in \mathbb{N}}$, en déduire qu'il existe un unique $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :
$n \geq n_0 \Rightarrow K_n =$
$n < n_0 \Rightarrow K_n \subset K_{n+1}$ et $K_n \neq K_{n+1}$
puis que : $n \geq n_0 \Rightarrow I_n =$ et que $n_0 \leq p$.

3- a) Montrer que = { 0 } , que ces sous-espaces de E sont supplémentaires , stables par u .

b) Montrer que l'endomorphisme induit par u sur est bijectif .

c) Montrer que l'endomorphisme induit par u sur est nilpotent .

4 - Déterminer n_o , , dans les cas ci-dessous :

a) u est bijectif
b) u est diagonalisable , non nulle et admet 0 pour valeur propre d'ordre q .
c) u est symétrique dans E euclidien .
d) u est un projecteur distinct de 0 et Id_E .
e) u est nilpotent d'indice d ; on montrera que $d \leq p$.

5- Soit u nilpotent d'indice p . Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $B = (x , u(x) , ..., u^{p-1}(x))$ soit une base de E . Déterminer la matrice de u dans B , et celle de u^2 .

6- Soit u nilpotent d'indice d , et v un endomorphisme de E tel que $v^2 = u$. Montrer que v est nilpotent ; quel peut être son indice ? en déduire que $d \leq (p+1)/2$.

7- p =2 . Existe t'il une matrice V telle que $V^2 =$? $(V \in M_2(\mathbb{R}))$.

SECONDE PARTIE

Dans le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormal (O , ,) ; soit E l'ellipse d'équation :

1 , a > b > 0 , de foyers F et F' , F' .

On désigne C le cercle de centre F' et de rayon 2a .

Infty08

On notera (AB) la droite AB , AB la distance entre deux points A et B et [A , B] le segment . On pourra utiliser le fait que si M ∈ E , la tangente à E en M est la bissectrice extérieure de l'angle ( ) .

M et M' désignent des points de E , K le point de C tel que M ∈ [F', K] , K'∈ C tel que M' ∈ [F', K'] .
On n'utilisera pas le repère et les coordonnées dans les questions 1, 2, 6, 7, 8 .

1- Montrer que MF = MK et que la tangente à E en M est la médiatrice de [F, K] .
2- a) On suppose que (FK) ⊥ (FK') . Montrer que les tangentes à E en M et M' sont orthogonales , et se coupent au milieu de [K , K'] .
b) Réciproquement , montrer que si les tangentes à E en M et M' sont orthogonales , alors (FK) ⊥ (FK') .

3- Soient θ = ( ) et θ' = ( ) . Ecrire les coordonnées de K et K' en fonction de θ et θ' et montrer que (FK) ⊥ (FK') si et seulement si :

$$(a \cos\theta - c)(a \cos\theta' - c) + a^2 \sin\theta \sin\theta' = 0 \quad [1]$$

4 - Lorsque (FK) ⊥ (FK') , montrer que le milieu I de [K , K'] est sur le cercle C ' de centre O et de rayon .

5- En déduire le lieu des points du plan où se coupe deux tangentes à E qui sont orthogonales . On montrera soigneusement que la condition d'appartenance au lieu trouvé est nécessaire et suffisante . Ce lieu est nommé courbe orthoptique de E .

6- A partir de M ∈ E , construire un rectangle dont chaque côté est tangent à E et chaque sommet appartient à C' .

7- Pour un rectangle de longueur L et de largeur ℓ dont chaque sommet est sur C' , montrer que son aire est maximale lorsque L = ℓ . Quelle est cette aire maximale ?

8- En déduire l'aire maximale d'un rectangle dont chaque côté est tangent à E .
Quelle est l'aire minimale de ces rectangles ? Que dire si a = b ?

9- Dans l'espace affine euclidien de dimension 3 rapporté à un repère soit P : et H_α le plan d'équation : $z = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
a) Décrire P et P H_α .
b) Déterminer le lieu des points où se coupent deux tangentes à P qui sont parallèles au plan H_0 et orthogonales entre elles . On pourra se placer dans H_α , puis faire la réunion des lieux trouvés .

c) Mêmes questions avec Γ : , H' = $- z^2 = 1$,

H'' : à la place de P .

d) Sur P_1 : $z = x^2 + y^2$, déterminer les courbes dont la tangente fait un angle avec en tout point de la courbe .

Infty08